# Наибольшее общее простое

Из того, что для двух разных чисел на отрезке их $\gcp(a, b)$ должен равняться какому-то простому числу $p$ следует, что оба числа должны делиться на $p$. Значит, это должны быть числа кратные $p$. Все числа кратные $p$ имеют вид $x \cdot p$, где $x$ — некоторое целое положительное число. Тогда, для проверки того, что на отрезке $[l; r]$ есть два числа, которые делятся на $p$, можно просто брать первые два числа кратные $p$ на этом отрезке (если они есть). Первое число кратное $p$, назовем его $a$, которое больше или равно $l$, можно вычислить по формуле $a = \lceil \frac{l}{p} \rceil \cdot p$. Второе число кратное $p$, которое больше или равно $l$, это $b = a + p$. Разумеется, оба числа $a$ и $b$ при этом должны быть меньше или равны $r$.

Рассмотрим подробнее ограничение $b = a+p = \lceil \frac{l}{p} \rceil \cdot p+p \leqslant r$. Вынесем $p$ за скобки: $p \cdot (\lceil \frac{l}{p} \rceil + 1) \leqslant r$. Известно, что частное $\lceil \frac{l}{p} \rceil$ может принимать порядка $\sqrt{l}$ различных значений. Действительно, мы имеем $\sqrt{l}$ значений при $p \leqslant \sqrt{l}$, а при $p > \sqrt{l}$ само выражение $\lceil \frac{l}{p} \rceil$ принимает значения от 1 до $\sqrt{l}$. Таким образом, если в неравенстве $p \cdot (\lceil \frac{l}{p} \rceil + 1) \leqslant r$ зафиксировать значение частного $\lceil \frac{l}{p} \rceil = x$, то останется найти самое большое простое число $p_x$ такое, что $\lceil \frac{l}{p_x} \rceil = x$ и $p_x \cdot (x + 1) \leqslant r$. Для этого можно просто взять самый большой $y$ такой, что $\lceil \frac{l}{y} \rceil = x$ и $y \cdot (x + 1) \leqslant r$, а затем поискать подходящее простое число рядом с $y$. Это будет работать быстро потому, что простые числа плотно и достаточно равномерно распределены на отрезках в заданных ограничениях. При аккуратной реализации это решение позволяло сдать задачу.

Рассмотрим теперь другое решение. Из условия $b \leqslant r$ следует, что $a+p \leqslant r$ или $a \leqslant r-p$. Таким образом, для фиксированного числа $x$, не обязательно простого, определена безопасная зона $[l; r-x]$ такая, что если первое число кратное $x$ на отрезке $[l; r]$ попадает в безопасную зону, то второе число кратное $x$ гарантированно попадает в отрезок $[l; r]$.

Пусть надо проверить число $p$. Найдем его первое кратное на отрезке $[l; r]$. Если первое кратное попадает в безопасную зону, то проверяем $p$ на простоту. Иначе заметим, что первое число кратное $p$ представимо в виде $fm = p \cdot k$, для некоторого целого $k$. Тогда, следующее по убыванию число, которое надо проверить, это $p-1$. Рассмотрим число $(p-1) \cdot k = p \cdot k - k$. Тогда, либо оно является первым кратным на отрезке для $p-1$, либо выходит за левую границу отрезка. Во втором случае просто пересчитаем первое кратное, а в первом случае можно поступить так: при уменьшении $p$ на 1 увеличим безопасную зону на 1, а первое кратное (если не выходит за границу отрезка) уменьшим на $k$. Тогда вычислим первый момент, когда какое-то число вида $p - i$ попадет в безопасную зону. Обозначим правую границу безопасной зоны за $last$. Тогда $fm - k \cdot i \leqslant last + i$, откуда $i \geqslant \frac{fm-last}{k+1}$. Это позволяет нам быстро пропускать все числа, которые не попадают в безопасную зону и заведомо не имеют хотя бы двух кратных на отрезке.

Пусть теперь дан отрезок длины хотя бы $10^6$ (для меньших длин можно использовать, например, предыдущий метод). Тогда можно считать, что все интересующие нас простые также порядка $10^6$, потому что всегда существует ответ порядка $\frac{10^6}{2}$. Первое число кратное любому числу $x$ такого порядка будет иметь вид $x \cdot k$, где $k \leqslant 10^3$. Но тогда:

1. При каждом выходе за левую границу отрезка при пересчете кратного имеем число порядка $l - 1000$, так как максимальный множитель у кратного равен $10^3$. Тогда для пересчета первого числа кратного $p$ достаточно прибавить один раз само $p$, так как оно порядка $10^6$.

2. Если ответ не будет найден в самом начале, то при подсчете первого момента попадания в безопасную зону будет за $\mathcal{O}(1)$ пропущено $\frac{10^6}{10^3} = 10^3$ заведомо неподходящих чисел. После десяти таких итераций безопасная зона будет порядка $10^4$, поэтому в нее попадет порядка десяти чисел-кандидатов, среди которых найдется простое.