Колобки против Энигмы

Введём обозначение $A = 10$

Решение за $O(nA^3)$: заведём динамику $dp[n][d][g]$ — количество чисел длины n таких, что последняя цифра равна d и её НОД с предыдущей цифрой равен g. База динамики – переберём всевозможные двузначные числа, состояние определяется второй цифрой и её НОДом с первой, увеличиваем значение в состоянии на 1. Считать эту динамику можно вперёд: $dp[n+1][e][\gcd(d,e)] += dp[n][d][g], g \neq \gcd(d,e)$. Ответ — сумма по всем состояниям динамики.

Решение за $O(nA^2 \log A)$: заметим, что число состояний динамики на самом деле не A^2, а $A \log A$, поскольку $g|d$, состояний со вторым параметром равным g будет $\frac{A}{g}$. Сумма $\sum\limits_{g=1}^{A} \frac{A}{g}$ оценивается как $A \log A$, на практике выходит 33 состояния.

Эта динамика оптимизируется бинарным возведением матрицу в степень: возьмём матрицу M размерами 33 $\times$ 33, Пронумеруем как угодно все состояния, затем определим $M_{i,j}$ = можно ли из состояния i перейти в состояние j, дописав одну цифру. Затем возводим M в степень $n-2$ и домножаем на базу. Получаем время работы $O(t(A \log A)^3 \log n)$.

Заметим, что в бинарном возведении в степень мы каждый раз считаем M^{2^k}, но это можно сделать один раз. А с предподсчитанными степенями матрицы M мы можем домножать на них не матрицу 33 $\times$ 33, а одномерный вектор размера 33. Тогда время работы составит $O((A \log A)^3 \log n + t(A \log A)^2 \log n)$.